AMADASI Maxime BOURBON Clarisse BULTEL Thomas FILA Benoît KÜFFER Paul LAFOND Alexandra ROUX-MOLLARD Quentin

ARVI

Projet 2022-2023 Présentation Chenille





Table des matières

1)	INTRODUCTION	6
2)	LA CINEMATIQUE D'UNE CHENILLE	6
3)	LES PUISSANCES DISSIPEES ET LE COUPLE MOTEUR	11
4)	STATIQUE DU TRAIN CHENILLE	15
5)	L'AMORTISSEUR	20
6)	ANNEXES	24

Acronymes :

Nom	Signification
CIR	Centre Instantané de Rotation
Cumhala	Cignification
Symbole	Signification
кg	Kliogramme
$m a^{-1}$	Mètre par seconde
$m s^{-2}$	Mètre par seconde carré
111. S mm	Millimàtre
N	Newton
S	Seconde
Inconnues	Signification
I.	longueur de la chenille
1	Largeur de la chenille
Ĕ	Distance du bord frontal de la chenille au centre de gravité
e	Distance du bord intérieur de la chenille au centre de gravité
\vec{x}	Vecteur unitaire x de la base $\overrightarrow{B_0}$.
\vec{v}	Vecteur unitaire v de la base $\overline{B_{i}}$
y V.	Vitesse linéaire de la chenille gauche par rapport au sol
V_1 V_2	Vitesse linéaire de la chenille droite par rapport au sol
\vec{R}	Vecteur position du robot à chaque instant à trois coordonnées
X	Coordonnée du vecteur position du robot selon \vec{x}
v_r	Coordonnée du vecteur position du robot selon \vec{v}
θ_r	Angle coordonnée du vecteur position du robot selon \vec{z}
V	Vitesse linéaire au niveau du barbotin
$R = R_{nominal}$	Rayon nominal du barbotin
ω_m	Vitesse de rotation du barbotin
I _{inst}	Longueur associée au CIR
L_e	Longueur de l'entraxe entre les deux points particuliers
V_{moy}	Vitesse linéaire du robot par rapport au sol moyenne au centre de gravité
x	Coordonnée du vecteur position du robot selon \vec{x}
<i>y</i>	Coordonnée du vecteur position du robot selon y
dθ	Petit angle forme entre les instants t et dt
θ	Angle coordonnee du vecteur position du robot seion z
иі +	Tomps durant loquel le robet pout avancer
ė.	Vitesse de rotation du robot au niveau du centre de gravité par rannort au
$v_{1/0}$	Effort tangentiel
I N	Effort normal
<i>(</i>)	Angle du cône de frottement
dS	Surface infinitésimale permettant l'intégration
dx	Longueur infinitésimale permettant l'intégration selon \vec{x}
dy	Longueur infinitésimale permettant l'intégration selon \vec{y}
P_{pertes}	Puissance perte par frottement de la chenille sur le sol
M _{robot}	Masse totale du robot
g	Pesanteur
f_{sol}	Frottement de la chenille sur le sol
C_m	Couple du barbotin sur la chenille
F_{f}	Ensemble des efforts pertes non calculés
$\overrightarrow{F_1}$	Effort du train chenillé supérieur
$\overrightarrow{F_2}$	Effort du train chenillé inférieur

sol

$\overrightarrow{F_x}$	Effort de la roue tendeur sur la chenille
α	Angle entre les deux trains chenillés du tendeur
F _{horizontale}	Force de l'ensemble tendeur sur la roue tendeur
R	Longueur entre le dernier point de contact de la chenille sur le barbotin et le point de contact de la suspension.
В	Longueur entre le dernier point de contact de la chenille sur le barbotin et le premier point de contact du galet de charge
а	Longueur entre le point de contact de la suspension et le premier point de contact du galet de charge
<i>a</i> ′	Longueur entre le point de contact de la suspension et le premier point de contact du galet de charge en tendant la chenille
dl	Distance qui quantifie l'élongation de la chenille
dx	Distance qui quantifie l'élongation du ressort
S	Demi-périmètre
Α	Aire du triangle
Ζ	Variation de la hauteur du sol
λ	Longueur du ressort
θ	Angle pour une loi géométrique
α	Angle pour une loi géométrique
$ au_{robot}$	Temps caractéristique du système ressort-robot
$ au_{ressort}$	Temps caractéristique du système ressort-roue
K	Raideur du ressort
f	Frottement sec dans la liaison du ressort au bâti
λ_0	Longueur initiale du ressort
α_0	Angle initial pour une loi géométrique
ξ	Nom donné afin de simplifier l'écriture
β	Nom donné afin de simplifier l'écriture
γ	Nom donné afin de simplifier l'écriture

Table des figures :

Figure 1 : Structure des chenilles6
Figure 2 : Dimensions d'une chenille6
Figure 3 : Description des points particuliers sur la chenille7
Figure 4 : Description du modèle cinématique7
Figure 5 : CIR avec V1.V2≥0 et V2 > V1 8
Figure 6 : CIR avec V1.V2≤0 et V2 > V1 8
Figure 7 : CIR avec V1.V2≥0 et V1 ≥ V2 8
Figure 8 : Intégration du mouvement circulaire9
Figure 9 : CIR avec V1.V2≥0 et V2 > V1 10
Figure 10 : Module de déplacement schématisé avec le sol 10
Figure 11 : Loi de coulomb 11
Figure 12 : Pression équitablement répartie sur la chenille11
Figure 13 : Surface élémentaire d'intégration sur la chenille12
Figure 14 : Surface donnant la puissance pertes en frottement à V1=-V2=1m/s sur python 13
Figure 15 : Surface donnant la puissance pertes en frottement à V1=-V2=1m/s sur python 2 13
Figure 16 : Rappel des dimensions d'une chenille 14
Figure 17 : Dimensions du modèle mathématique 15
Figure 18 : Chaîne cinématique de la mise sous tension 15
Figure 19 : Direction des forces d'un solide soumis à trois forces, méthode graphique 16
Figure 20 : Résolution du problème en statique graphique d'un solide soumis à trois forces 16

Figure 21 : Suite des efforts présents au sein de la chenille	- 17
Figure 22 : Dimensions du système géométrique de suspension	- 18
Figure 23 : Résultats de la courbe donnant dx en fonction de dl avec a, B et R	- 19
Figure 24 : Dimensions du modèle mathématique	- 20
Figure 25 : Maquette SolidWorks, vue sur l'amortisseur et la bague de cuivre en orange	- 20
Figure 26 : Schéma de principe de l'amortisseur	- 21
Figure 27 : Rappel des fonctions trigonométriques	- 22
Figure 28 : Feuille Excel sur le calcul de la loi entrée-sortie de l'amortisseur	- 23

Table des équations :

Equation	Valeur
L	$\int x = I_{inst}(t) \cdot \cos(\theta(t+dt)) + x_r - I_{inst}(t) \cdot \cos(\theta(t))$
1	$\left(y = I_{inst}(t) \cdot \sin(\theta(t+dt)) + y_r - I_{inst}(t) \cdot \sin(\theta(t))\right)$
T	$\left(x = V_{moy}.dt.\cos\left(\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right) + x_r\right)$
I_2	$\left(y = V_{moy}.dt.\sin\left(\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right) + y_r\right)$
I_3	$d\theta = \frac{dt}{2} \cdot \left(\frac{V1(t) + V2(t)}{2.I_{inst}(t)} + \frac{V1(t+dt) + V2(t+dt)}{2.I_{inst}(t+dt)} \right)$
I_4	$d\theta = \frac{dt}{2} \cdot \left(\frac{V1(t)}{I_{inst}(t) - \frac{Le}{2}} + \frac{V1(t+dt)}{I_{inst}(t+dt) - \frac{Le}{2}} \right)$
I_5	$\vec{V}(x,y)_{2/0} = \left(V_1 + V_{moy} - y.\dot{\theta}_{1/0}\right).\vec{x} + x.\dot{\theta}_{1/0}.\vec{y}$
P_1	$P_{pertes} = \frac{M_{robot}.g.f_{sol}}{4.L} \cdot \left \dot{\theta}_{\frac{1}{0}} \right \cdot (2.E^2 - 2.E.L + L^2)$
C_1	$C_m = M_{robot}.R^2.\frac{d\omega}{dt} + R.F_f$
<i>C</i> ₂	$C_m = M_{robot} \cdot R^2 \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{M_{robot} \cdot g \cdot R}{4 \cdot L \cdot (e + \frac{l}{2})} \cdot (2 \cdot E^2 - 2 \cdot E \cdot L + L^2) + R \cdot F_f$
T_1	$F_{horizontale} = F1.(\cos \alpha + 1) = F_2.(\cos \alpha + 1)$
T_2	h - h' = dx
T_3	$h = \frac{2A}{B}$
T_4	$h' = \frac{2A'}{B}$
T_5	$dx = \frac{2 \cdot \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-B) \cdot (s-R)}}{B} - \frac{2 \cdot \sqrt{s' \cdot (s'-a+dl) \cdot (s'-B) \cdot (s'-R)}}{B}$
E_1	$F = m_{roue} \cdot g \cdot \sin \alpha + K \cdot x + f \cdot \dot{x} + m_{roue} \cdot \ddot{x} \approx m_{roue} \cdot g \cdot 0,787 + \frac{K \cdot z(t)}{0.7255}$
E_2	$z(t) = \lambda_0 . \sin(\alpha_0) - \lambda . \sin(\alpha) \Leftrightarrow z(t) = 0.7255. x(t)$
E_3	$\begin{cases} R.\cos(\theta) + \lambda.\cos(\alpha) = L \\ h + R\sin(\theta) = \lambda\sin(\alpha) \end{cases} \iff \begin{cases} R^2.\cos^2\theta = L^2 + \lambda^2.\cos^2(\alpha) - 2.L.\lambda.\cos(\alpha) \\ R^2\sin^2\theta - h^2 + \lambda^2\sin^2(\alpha) - 2.L.\lambda\sin(\alpha) \end{cases}$
E_4	$R^{2} = L^{2} + h^{2} + \lambda^{2} - 2.\lambda(L.\cos(\alpha) + h.\sin(\alpha)) \Leftrightarrow \xi = \arccos A(\lambda) + \arctan \beta$
E_0	$\lambda.\sin\alpha = \frac{1}{\gamma.\sqrt{1+\beta^2}} \cdot \left(\beta.\left[\lambda^2 + \xi\right] + \sqrt{-\left(\xi + \lambda.\left(\lambda - \gamma\right)\right).\left(\xi + \lambda.\left(\lambda + \gamma\right)\right)}\right) \Leftrightarrow \lambda.\sin\alpha = 0.7255.\lambda + 5.517$

1)Introduction

La structure choisie :



Figure 1 : Structure des chenilles

La structure de cette chenille est en triangle, voir figure 1.

Les galets porteurs ne sont pas représentés, mais ce sont eux qui transmettent le poids du véhicule sur le sol. Le tendeur tend la chenille, la suspension permet de toujours garder une tension correct dans le train chenillé, et le barbotin est le vecteur de transmission de puissance.

2) La cinématique d'une chenille

Description du modèle :



Figure 2 : Dimensions d'une chenille

La modélisation de la chenille est proposée avec des longueurs supposées comme étant parfaites, (voir figure 2).

De plus, toutes les unités seront dans le SI. (m, s, kg...)

Il faut comprendre, avant d'effectuer des calculs, que la vitesse associée à un point de la chenille dépend de la vitesse absolue du robot par rapport au sol, mais également de la vitesse relative de la chenille sur le sol. On fait alors une décomposition cinématique des vitesses. Posons dans un premier temps deux points spéciaux situés sur la chenille. Ces points sont centrés au milieu de la chenille parcourus par la droite perpendiculaire à celle-ci passant par le centre de gravité, (voir figure 3).



Figure 3 : Description des points particuliers sur la chenille

Ces deux points ont la particularité d'avoir une vitesse relative chenille-sol toujours perpendiculaire à la droite reliant le Centre Instantané de Rotation (CIR) et le centre de gravité (G). L'ensemble des points des CIR forment par construction la droite perpendiculaire aux chenilles qui passe par le point G (Droite en pointillée sur la figure 3).

Ce système se simplifie en un modèle à deux roues séparées d'une distance L. Celui-ci est connu en tout point, positionné à chaque instant par son vecteur position \vec{R} , qui définit sa position cartésienne et son orientation dans le plan (x, y). Nous posons également V1 et V2 les deux vitesses linéaires représentant la chenille de gauche et de droite, respectivement. N'oublions pas que l'on considère, dans un premier temps, un système équivalent à un robot ayant deux roues modélisées comme ci-dessous :



Figure 4 : Description du modèle cinématique

Le centre des deux roues motorisées est écarté de L. On admettra que le rayon des roues est connu et exact et qu'il existe une relation simple reliant la vitesse angulaire et linéaire d'une roue : $V = R. \omega_m$.

Modèle mathématique associé à son mouvement :

Il se décompose en deux temps. Chacun de ces temps est réparti en deux sous catégories associées à la rotation d'une part et à l'étude rectiligne d'autre part. Tout d'abord, il faudra décomposer les lois cinématiques associées à chacun de ces mouvements, puis recomposer pour pouvoir extraire les données souhaitées : ici V1(t) et V2(t) donnent $\overrightarrow{R(t)}$.

1. Centre instantané de rotation :

Le mouvement circulaire admet un centre de rotation instantané se présentant sous 4 formes possibles :

• $V1.V2 \ge 0 \ et \ |V2| > |V1|$:

<u>NB</u>. On prendra cette distance CIR appelé, par la suite, *linst* **positive**.

Par analyse cinématique on trouve, $I_{inst} = \frac{V^{2.L_e}}{V^2 - V^1} - \frac{L_e}{2}$

• $V1.V2 \le 0 \ et \ |V2| > |V1|$:

<u>NB</u>. On remarque que V1 et V2 ne sont pas des vecteurs. Cependant, ils sont scalaires et possèdent un sens qui leur est propre. Il faut faire relativement attention à leur signe.

Par analyse cinématique on trouve, $I_{inst} = \frac{(|V2| - |V1|) \cdot L_e}{2 \cdot (|V1| + |V2|)}$

• $V1.V2 \le 0 \ et \ |V1| \ge |V2|$:





Figure 6 : CIR avec V1.V2≤0 et |V2|>|V1|

<u>NB.</u> Il est important de faire attention aux symboles $> et, ou \ge$. En effet, l'ordre de traitement informatique est toujours de vérifier si les vitesses V1 et V2 sont opposées avant de regarder si elles sont égales. Autrement, pendant la comparaison en valeur absolue, il peut y avoir un problème avec plusieurs égalités !!

Par analyse cinématique, on trouve, $I_{inst} = \frac{(|V1| - |V2|) L_e}{2.(|V1| + |V2|)}$

• $V1.V2 \ge 0 \ et \ |V1| \ge |V2|$:

Par analyse cinématique, on trouve

$$I_{inst} = \frac{V_{1.L_e}}{V_{2}-V_1} - \frac{L_e}{2}$$



Figure 7 : CIR avec V1.V2≥0 et |V1|≥|V2|

• Si V1 = V2:

On retourne I_{inst} ="+infini" et on procédera au traitement ultérieurement.

2. Fonction mathématique d'intégration du mouvement :

Ici aussi, le problème se décompose en plusieurs parties, notamment en ligne droite. En effet, si le CIR est à l'extérieur des roues du robot, alors sa trajectoire est un cercle avec une avance moyenne $V_{moy} = \frac{V1 + V2}{2}$. Or, quand le rayon de courbure se trouve à l'intérieur du robot càd avec V1.V2<0, sa trajectoire est également un cercle avec des vitesses différentes, (Voir figure 8).

• Equation du cercle déterminant sa trajectoire circulaire :

Cette équation sera donnée en paramétrée pour plus de simplicité dans les calculs informatiques (l'équation cartésienne dépend des variables au quadratique).

$$\begin{cases} x = I_{inst}(t) \cdot \cos(\theta(t+dt)) + x_r - I_{inst}(t) \cdot \cos(\theta(t)) \\ y = I_{inst}(t) \cdot \sin(\theta(t+dt)) + y_r - I_{inst}(t) \cdot \sin(\theta(t)) \end{cases}, (I_1)$$



<u>NB.</u> On distingue le temps présent et futur d'un instant *dt*. Ce *dt* représente, dans la réalité, le temps d'acquisition des capteurs. Il est infinitésimal, et plus il sera court, plus nous serons précis dans le calcul du mouvement et de la trajectoire.

• Equation de la ligne en mouvement rectiligne :

$$\begin{cases} x = V_{moy}. dt. \cos\left(\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right) + x_r \\ y = V_{moy}. dt. \sin\left(\theta(t) + \frac{\pi}{2}\right) + y_r \end{cases}, (I_2) avec V_{moy} = \frac{V_1 + V_2}{2} = V_1 = V_2 puisqu'ils sont égaux.$$

3. Recherche mathématique de l'obtention de thêta, à un instant t donné :

Pour l'obtention de cet angle (θ), il va aussi falloir décomposer le mouvement en trois cas. On donne à $d\theta$ le petit angle de variation entre l'instant t et l'instant t+dt.

• En ligne droite (si *I*_{inst}="+infini") :

En ligne droite, pas de variation de direction du vecteur position \vec{R} . On a donc $d\theta = 0$.

• En mouvement circulaire avec $|I_{inst}| \ge \frac{L_e}{2}$:

On a en cinématique,

$$\frac{V1+V2}{2} = I_{inst} \cdot \frac{d\theta}{dt} \Leftrightarrow \frac{V1+V2}{2.I_{inst}} \cdot dt = d\theta \Leftrightarrow d\theta = \int_t^{t+dt} \frac{V1+V2}{2.I_{inst}} \cdot dt \Rightarrow d\theta = \frac{dt}{2} \cdot \left(\frac{V1(t)+V2(t)}{2.I_{inst}(t)} + \frac{V1(t+dt)+V2(t+dt)}{2.I_{inst}(t+dt)}\right) (I_3)$$

• En mouvement circulaire avec $|I_{inst}| \leq \frac{L_e}{2}$

On réalise une simple équation cinématique avec une vitesse au choix. Ici on choisit V1.

On obtient,
$$d\theta = \frac{dt}{2} \cdot \left(\frac{V1(t)}{I_{inst}(t) - \frac{Le}{2}} + \frac{V1(t+dt)}{I_{inst}(t+dt) - \frac{Le}{2}} \right) (I_4)$$

• Equation totale de thêta :

On notera que θ est l'intégrale de $d\theta$ sur les bornes [0; t]. Ainsi, par la relation de Chasles, et en estimant que les relations sont linéaires, on obtient : $\theta(t + dt) = \theta(t) + d\theta$

Modèle mathématique associé au mouvement complet avec la chenille :

D'après l'étude précédente, on peut calculer, à chaque instant, le vecteur position du robot. Les trois données d'entrées du système sont , V1(t), V2(t) et $\overrightarrow{R_0}$ qui donnent $\overrightarrow{R(t)}$.

L'ensemble de ces données nous permet de calculer, à chaque instant, la rotation du robot par rapport au sol, sa vitesse et la rotation des chenilles par rapport au robot.

1. Centre Instantané de Rotation :

On rappelle un des schémas donnant la position du Centre Instantané de Rotation (CIR). La longueur L_e vaut désormais, $L_e = 2.e + l$



Figure 9 : CIR avec V1.V2≥0 et |V2|>|V1|

2. Description des 3 différents éléments de notre problème : la chenille, le robot, le sol :

On pose : le sol (0), le robot (1) et la chenille (2), (voir figure 10).



Figure 10 : Module de déplacement schématisé avec le sol

On posera également le système de notation ci-après :

V1 du point O appartenant à (2) par rapport à (0) ; $\overrightarrow{V_1} \Rightarrow \overrightarrow{V_1}(O)_{2/0}$

3. Loi cinématique :

On considère une vitesse dépendant de x et de y, vecteur défini dans la base $\overrightarrow{B_0}$.

La loi de composition des vitesses, appliquée à un point de la chenille, donne ceci :

$$\vec{V}(x,y)_{2/0} = \vec{V}(x,y)_{2/1} + \vec{V}(x,y)_{1/0}$$
$$\vec{V}(x,y)_{2/1} = V_1 \cdot \vec{x} = R \cdot \omega_m \cdot \vec{x}$$
Et aussi, $\vec{V}(x,y)_{1/0} = V_{robot} \cdot \vec{x} + \dot{\theta}_{1/0} \cdot (x \cdot \vec{y} - y \cdot \vec{x})$

Avec V_{moy} , la vitesse d'avance du robot au centre de gravité, $V_{moy}(t) = \frac{V_1(t) + V_2(t)}{2}$

Avec $\dot{\theta}_{1/0}$, la rotation du robot au centre de gravité par rapport au sol, $\dot{\theta}_{1/0} = \begin{cases} 0 \ si \ CIR = " + infini" \\ \frac{V_{moy}}{CIR} \ si \ CIR \neq 0 \\ \frac{V_1}{\rho + \frac{1}{\nu}} \ sinon \end{cases}$

On a donc, $\vec{V}(x, y)_{2/0} = (V_1 + V_{mov} - y \cdot \dot{\theta}_{1/0}) \cdot \vec{x} + x \cdot \dot{\theta}_{1/0} \cdot \vec{y}$, (l_5)

3) Les puissances dissipées et le couple moteur

a) Introduction

Il existe plusieurs sources de frottement. L'une d'entr'elle est le frottement de la chenille sur le sol. Sa norme est le produit entre un effort et une vitesse relative. Une autre n'est pas étudiée ici mais elle correspond à l'effort de compression du sol lors du passage de l'engin.

b) Puissances dissipées par frottement

En reprenant les équations cinématiques, on développe la statique.

Pression de contact de la chenille sur le sol :

Le principe part du postulat que l'ensemble de la chenille est toujours en glissement dynamique. Cela induit que l'effort est toujours sur le cône de frottement, expliqué par la loi de Coulomb, (voir figure 11).



Figure 11 : Loi de coulomb

On a donc $f_{sol} = \tan(\varphi)$, ce qui impose en glissement $T = f_{sol}$. N.

Cependant, cet effort n'est pas réparti sur des points de contact. C'est une pression supposée comme équitablement répartie sur la chenille, (voir figure 12).



Figure 12 : Pression équitablement répartie sur la chenille

Intégration du produit F.V :

L'intégration doit donc se faire sur l'ensemble de la surface. En posant dS = dx. dy et en intégrant sur l'ensemble de la chenille.



Figure 13 : Surface élémentaire d'intégration sur la chenille

La puissance dissipée est le produit scalaire de la vitesse et de l'effort. Etant en infinitésimal, il est nécessaire de passer par la pression. On a donc, $P_{pertes} = \bigoplus_{s} Pression. |\vec{V}(x, y). d\vec{x}| . dS$

$$P_{pertes} = \int_{e}^{e+l} \left(\int_{E-L}^{E} \left(\frac{M_{robot} \cdot g \cdot f_{sol}}{2.S} \cdot \left| \dot{\theta}_{1/0} \cdot x \right| dx \right) dy \right) = \frac{M_{robot} \cdot g \cdot f_{sol}}{4.L} \cdot \left| \dot{\theta}_{\frac{1}{0}} \right| \cdot (2.E^2 - 2.E.L + L^2), (P_1).$$

Conclusion :

Aussi étonnant que cela puisse paraître, la longueur l n'est pas prise en compte.

Cette équation mathématique a été implémentée en python. Il en ressort un graphe donnant les extrémums de puissances, fonctions des paramètres de longueurs . On note des valeurs particulières de dimensions optimales.

Figures résultat :

Voici l'allure de la courbe (voir figure 14, 15) obtenue, intégrant différents paramètres. Ces paramètres sont nommés de la même manière que référencés plus haut dans la partie '<u>Description du</u> <u>modèle'</u>.

Voici la courbe de la puissance fonction des deux paramètres de longueurs.



Figure 14 : Surface donnant la puissance pertes en frottement à V1=-V2=1m/s sur python



Figure 15 : Surface donnant la puissance pertes en frottement à V1=-V2=1m/s sur python 2

En conclusion, avec un entraxe proche de L/2, la puissance dissipée moyenne est la plus faible. On y parvient grâce à cette surface en 3 dimensions. Il existe un puits de potentiel désignant les limites géométriques. En effet, il semble logique que le centre de gravité, situé au milieu des chenilles, rende symétrique les efforts et les vitesses, et donc minimaux.

c) Couple moteur

Dynamique du système :

La dynamique du modèle est régie par des phénomènes que nous n'avons pas pu examiner. Passer par un théorème de l'énergie cinétique pourrait être source de trop d'inconnues. Il est évident que ces puissances doivent être prises en compte. Il est nécessaire de prendre un coefficient de sécurité sur le dimensionnement final du couple. Celui-ci n'étant pas connu, il pourrait faire l'objet d'une étude empirique à part entière, à l'aide de la maquette du robot finalisée. On suppose les puissances pertes du système comme étant du frottement visqueux, dû aux éléments roulants et à la surface du robot en contact avec le sol. Il y a également du frottement sec dans tous les éléments mécaniques.

Une puissance perte très importante en valeur absolue est due à la déformation du sol. En effet, lorsque le véhicule roule, il déforme sous son poids le sol. Cette déformation n'est pas négligeable sur un sol boueux, sablonneux ou en gravier. Nous n'avons cependant pas considéré ces pertes dans les cas d'utilisation de ce robot.

• Modélisation mathématique :

On se référera aux dimensions évoquées ci-après (voir figure 17). On nommera le couple moteur et l'ensemble des frottements avec $C_m \ et \ F_f$. De plus, nous ferons la distinction entre $C_{max} \ et \ C_{nom}$ qui correspondent respectivement au couple maximum atteint par le moteur et le couple nominal.

• Théorème du principe fondamental de la dynamique :

$$C_m = M_{robot} \cdot R^2 \cdot \frac{d\omega}{dt} + R \cdot F_f(C_1) \text{ si le robot avance en ligne droite}$$

$$C_m = M_{robot} \cdot R^2 \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{M_{robot} \cdot g \cdot R}{4 \cdot L \cdot \left(e + \frac{l}{2}\right)} \cdot \left(2 \cdot E^2 - 2 \cdot E \cdot L + L^2\right) + R \cdot F_f(C_2) \text{ si le robot tourne}$$

L'ensemble des distances est repris de l'étude sur la puissance perte par frottement. Voici le rappel des dimensions (voir figure 8), où M_{robot} est la masse totale du robot, $R = R_{nominal}$ rayon nominal du barbotin et ω la vitesse de rotation du barbotin en rad/s.



Figure 16 : Rappel des dimensions d'une chenille

4) Statique du train chenillé

Description du modèle :

La modélisation du robot est faite de cette manière (voir figure 17). L'élément chenille est considéré comme seul, son opposé étant symétrique, les efforts le seront aussi.



Figure 17 : Dimensions du modèle mathématique

De plus, toutes les unités seront dans le SI. (m, s, kg...)

On suppose connues toutes les données concernant le modèle : se référer aux présentations sur la cinématique et les pertes puissances par frottements sur un élément chenillé. Nous allons observer dans cette étude la statique d'un train chenillé.

Statique du modèle :

Pour considérer le modèle en mode statique, on émet des hypothèses. Le moteur est à l'arrêt et il n'exerce aucun couple résistant. L'ensemble du robot est en l'air, c'est-à-dire qu'il ne repose pas par terre et aucun frottement n'est possible avec le sol. En premier lieu, on considèrera la raideur de l'ensemble des éléments du système comme négligeable devant la raideur du ressort de suspension. Il n'y a donc pas de déformation pour la chenille, ni de torsion de l'axe moteur ou d'autres éléments qui pourraient être considérés comme des ressorts. La chenille est considérée comme sans jeu, et tendue sans effort à t = 0 s.

1. La tension de la chenille :

Le tendeur est l'élément permettant d'obtenir la tension souhaitée dans la chenille. Cette tension est l'image du produit de l'ensemble de la raideur du système et du déplacement relatif du tendeur. On ne sait pas comment sont répartis les efforts dans le module roue folle/tendeur. On rappelle la solution du tendeur, système vis/boulon (vois figure 18).



Figure 18 : Chaîne cinématique de la mise sous tension

Le système étant considéré comme parfait, il transmet uniquement l'effort horizontalement. L'ensemble des efforts de charges est repris par la liaison pivot de la roue folle. Ceci est assuré par un réglage des éléments et une conception la plus isostatique possible.

L'objectif étant de connaître les efforts, on va retourner aux bases graphiques de la statique. L'ensemble est un solide à trois forces dont on connaît deux dimensions et une norme. (Voir figures 19 et 20).



Figure 19 : Direction des forces d'un solide soumis à trois forces, méthode graphique

On constate que l'on connaît l'ensemble des directions, en faisant l'hypothèse que l'ensemble est symétrique, on peut retrouver tous les angles. On va pouvoir se rapporter à un problème de statique graphique.



Figure 20 : Résolution du problème en statique graphique d'un solide soumis à trois forces

On peut désormais relier $\overrightarrow{F_x}$ à $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$. L'ensemble étant considéré comme symétrique, on a $\overrightarrow{F_1} \approx \overrightarrow{F_2}$. Graphiquement on a, $\frac{F_x}{2} = F_1 \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$. On retrouve dès lors $F_{horizontale}$ l'effort de poussée du boulon sur la roue folle (se référer à la figure 3), car l'ensemble des efforts verticaux de F_x est repris par la liaison pivot. On obtient ainsi une force horizontale définie de cette façon : $F_{horizontale} = F1$. ($\cos \alpha + 1$) = F_2 . ($\cos \alpha + 1$) (T_1).

2. Effort dans la chenille :

Le modèle se compose de plusieurs maillons formant les uns avec les autres une chaîne. Chacune de ces chaînes peut être considérée comme un solide soumis à deux forces. Celles si sont donc dans la même direction, de mêmes normes et de sens opposé. On peut alors construire rapidement l'ensemble des efforts sur la chenille, (voir figure 21). La symétrie de l'ensemble de ces efforts s'explique par le même raisonnement que celui fait sur les figures 19 et 20. Le contact entre chaque galet se faisant sur un point, l'effort est normal à la chenille au contact de celui-ci.



Figure 21 : Suite des efforts présents au sein de la chenille

Cependant, il faut comprendre d'où viennent ces efforts. Dans notre hypothèse, la suspension est la seule raideur du système. Quand le tendeur se déplace horizontalement, il déplace également l'ensemble des chaînes, ce qui induit un déplacement du ressort. Ce déplacement provoque lui aussi un effort, donc une tension sur l'ensemble du système. La mise sous tension implique une diminution du jeu entre les maillons de la chenille, ce qui assure le bon fonctionnement du système. Sans pour autant connaître la tension idéale de la chenille, on peut se donner comme exigence d'avoir un système de tension permettant l'obtention d'une précharge correcte (voir plus que correcte). Voyons maintenant comment relier ce déplacement à cet effort.

3. Rapport entre l'écartement de la chenille et la distance de compression du ressort.

Hypothèses : On suppose que le mouvement de la chenille, lors de la tension du tendeur, peut uniquement se ramener à un déplacement de celle-ci par le bas. Le point de contact sera simplifié en approximant $R \approx const$ car la longueur est telle que $R \ge a$. Cet apport géométrique peut nous rapporter à une estimation de déplacement, où le point de contact de la roue sur la chenille serait un mouvement circulaire avec pour centre le dernier point de contact de la chenille sur le barbotin. On obtient donc le système géométrique suivant (voir figure 22),



Figure 22 : Dimensions du système géométrique de suspension

L'étude géométrique se portera sur la différence entre h et h'; où h - h' = dx (T_2), et le déplacement de la chenille sera noté dl = a - a'. On obtient l'aire du grand triangle avec la formule d'Héron :

On cherche s le demi périmètre,
$$s = \frac{a+B+R}{2}$$

Puis on obtient l'aire, $A(aire) = \sqrt{s.(s-a).(s-B).(s-R)}$

On connaît la relation entre la hauteur d'un triangle et l'aire de celui-ci, $A = \frac{B.h}{2} \iff h = \frac{2.A}{B} (T_3)$. En répétant les opérations avec les distances *a'et h'*, on obtient une nouvelle équation de *h'*.

$$h' = \frac{2.A'}{B} (T_4)$$

En regroupant E_2 avec $E'_2 et E''_2$ on obtient :

$$dx = \frac{2.\sqrt{s.(s-a).(s-B).(s-R)}}{B} - \frac{2.\sqrt{s'.(s'-a+dl).(s'-B).(s'-R)}}{B} (T_5)$$

Voici la loi géométrique donnant dx en fonction de dl, avec les valeurs de a = 105mm, B = 300mm et R = 210mm. Cette loi géométrique est construite sur un tableau Excel, (voir figure 23)



Figure 23 : Résultats de la courbe donnant dx en fonction de dl avec a, B et R

On constate que pour de faible débattement, une linéarisation est possible. Cette plage doit donc correspondre au dimensionnement de notre élément ressort. En effet, dépasser une valeur limite (maximum atteint quand $B = a + R - dl \iff dl = 15mm$ dans notre exemple) correspondrait à inverser le triangle, soit à une diminution de dl (voir figure 22). On retrouve bien cette limite sur la figure 23.

Si cette limite est dépassée par un effort extérieur plus important, cela se traduira par une diminution de la longueur de la chenille, soit une contrainte ascendante sur l'ensemble des maillons de la chenille. Cette contrainte excédante rend le matériau plus fragile dû à l'augmentation de la fatigue de celui-ci. Une possible casse des maillons ne serait alors pas à exclure.

$$(T_5) \Leftrightarrow dx \approx 1,94.\,dl$$

5)L'amortisseur

Description du modèle :

La modélisation du robot est réalisée de la manière suivante, (voir figure 24). Le ressort et l'amortisseur sont montés sur le bâti par une liaison glissière, puis par un pivot. Le but de cette fiche de présentation est de déterminer une relation entre z(t) et $\lambda(z)$.



Figure 24 : Dimensions du modèle mathématique

De plus, toutes les unités seront dans le SI. (m, s, kg...), à l'exception des longueurs qui pourront être en millimètre dans un tableau Excel ou sur python.

On suppose connues toutes les données concernant le modèle. L'élément dit de « suspension » est composé d'un ressort (de raideur K) et d'un amortisseur (frottement f). La source d'effort de l'amortisseur est un simple frottement dans la liaison glissière. En effet, la tige de maintien du ressort est en liaison glissière avec la bague orange. Cette bague en cuivre limite les frottements et l'usure des pièces.



Figure 25 : Maquette SolidWorks, vue sur l'amortisseur et la bague de cuivre en orange

Modèle masse ressort :

On s'intéresse désormais au modèle simplifié de l'amortisseur. Il faut considérer que le robot ne bouge pas durant une période courte, dû à son poids très important devant les efforts mis en jeu au niveau du ressort. Autrement dit, $\tau_{robot} = 2.\pi$. $\sqrt{\frac{M_{robot}}{K}} \gg \tau_{ressort} = 2.\pi$. $\sqrt{\frac{m_{roue}}{K}}$, on néglige le temps caractéristique du robot devant celui du ressort.



Figure 26 : Schéma de principe de l'amortisseur

1. Principe Fondamental de la Dynamique :

Sur le système masse amortisseur, on applique le Principe Fondamental de la Dynamique en s'aidant des figures 1 et 3. Avec le repère Galiléen et la projection suivant l'axe de l'amortisseur, on trouve :

$$F = m_{roue} \cdot g \cdot \sin \alpha + K \cdot x + f \cdot \dot{x} + m_{roue} \cdot \ddot{x} \quad (E_1)$$

Cette équation comprend une variable $\alpha(\lambda)$ qui dépend de la longueur de l'amortisseur. Il est donc nécessaire de connaître cette variable. De plus, la valeur F est due aux efforts extérieurs de la chenille sur la roue. Afin de limiter les efforts dans la liaison pivot, on essaie d'aligner la direction de l'amortisseur à la normal du contact entre la roue et la chenille.

Le sol évolue selon l'inconnue notée z(t). Cette évolution donne également l'évolution de $\lambda(z)$ et par implication, celle de x(z).

<u>Attention ! important :</u> Ce système n'est pas, intrinsèquement, un amortisseur ! Son utilisation reflète d'avantage du travail d'un tendeur dynamique. Lorsqu'un objet passe, la chenille va se tendre. Avec le rapport sur la statique et la dynamique des chenilles, on sait que l'ensemble du train chenillé est peu souple, il subit donc peu d'élongation. Le but de l'amortisseur est donc de compenser, par une plus grande souplesse, la déformation réelle de la chenille au contact de l'objet. Le comportement dynamique de cet objet est donc trop complexe et presque inutile. En effet, le système s'apparente davantage à une came tendeur qu'un amortisseur.

Recherche de la relation entre z(t) et $\lambda(z)$:

2. Loi géométrique :

Comme vu précédemment, on a besoin de connaître la relation entre z(t) et $\lambda(z)$. On construit, sur le modèle présenté en figure 24, une loi géométrique.

On a immédiatement : $z(t) = \lambda_0 . \sin(\alpha_0) - \lambda . \sin(\alpha) (E_2)$

En intégrant une autre boucle, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} R.\cos(\theta) + \lambda.\cos(\alpha) = L \\ h + R.\sin(\theta) = \lambda.\sin(\alpha) \end{cases} \iff \begin{cases} R^2.\cos^2\theta = L^2 + \lambda^2.\cos^2(\alpha) - 2.L.\lambda.\cos(\alpha) \\ R^2.\sin^2\theta = h^2 + \lambda^2.\sin^2(\alpha) - 2.h.\lambda.\sin(\alpha) \end{cases} (E_3)$$

En additionnant les deux sous-systèmes de (E_3) on obtient :

$$R^{2} = L^{2} + h^{2} + \lambda^{2} - 2.\lambda(L.\cos(\alpha) + h.\sin(\alpha))(E_{4})$$

Pour factoriser on utilise l'astuce mathématique donnant,

$$a.\cos(x) + b.\sin(y) = r.\cos(x - \psi)$$

$$A \operatorname{vec} r = \sqrt{a^2 + b^2} \operatorname{et} \tan \psi = \frac{b}{a}$$

$$(E_4) \iff \cos\left(\alpha - \arctan\left(\frac{h}{L}\right)\right) = \frac{L^2 + h^2 + \lambda^2 - R^2}{2.\lambda \cdot \sqrt{L^2 + h^2}} = A(\lambda) = \frac{\lambda^2 + \alpha}{\lambda \cdot \gamma}$$

On pose trois nouvelles lettres grecques : $\xi = L^2 + h^2 - R^2$, $\gamma = 2$. $\sqrt{L^2 + h^2}$ et $\beta = \frac{h}{L}$

 $(E_4) \iff \xi = \arccos A(\lambda) + \arctan \beta$

On recherche la fonction, $\lambda = f(z(t))$ sachant que $\alpha(\lambda)$, on doit donc trouver la fonction réciproque de $\lambda . \sin(\alpha)$ afin d'obtenir $(E_2) \Leftrightarrow \lambda = f^{-1}(z(t) - \lambda_0. \sin(\alpha_0))$. Cette équation pourra être simplifiée par l'intermédiaire d'un tableau <u>Excel</u> (ou un programme python) linéarisant l'équation sur la portion souhaitée. On s'aide des formules de trigonométrie, (voir figure 27).

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$
$$\arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$$

Figure 27 : Rappel des fonctions trigonométriques

$$\lambda \cdot \sin \alpha = \lambda \cdot \left(\frac{\sqrt{1 - A^2}}{\sqrt{1 + \beta^2}} + \frac{A \cdot \beta}{\sqrt{1 + \beta^2}} \right)$$
$$= \frac{1}{\gamma \cdot \sqrt{1 + \beta^2}} \cdot \left(\beta \cdot \left[\lambda^2 + \xi \right] + \sqrt{-\left(\xi + \lambda \cdot (\lambda - \gamma)\right) \cdot \left(\xi + \lambda \cdot (\lambda + \gamma)\right)} \right) (E_0)$$

3. Feuille Excel permettant la linéarisation :

Une feuille Excel est construite sur cette dernière équation (E_0) . Elle se décompose en deux graphiques : l'un pour regarder si la racine carrée n'est pas développable (non présenté dans ce rapport) en un polynôme afin de continuer les calculs analytiques , l'autre donne le tracé de l'équation. Attention, valeurs en millimètres.



Figure 28 : Feuille Excel sur le calcul de la loi entrée-sortie de l'amortisseur

Ce tableau Excel se décompose en trois points :

- Les données d'entrée du système pouvant être inscrites au moyen d'une barre de sélection
- Le calcul de valeurs spécifiques afin de donner, à notre tracé, le spectre le plus large
- Des graphiques permettant de visualiser les fonctions en jeu.

L'ensemble de ces points nous permet de conclure à une linéarisation de la fonction autour des points de fonctionnement. Ces points particuliers ont été déterminés par une maquette virtuelle en 3D (construite sur le logiciel de CAO SolidWorks, voir <u>figure 25</u>). Ce tableau Excel sera rendu accessible via notre site internet <u>Arvi</u>.

$$(E_0) \Leftrightarrow \lambda. \sin \alpha = 0,7255. \lambda + 5,517$$

4. Equation finale :

Rappel des équations à utiliser :

- Equation dynamique, $(E_1) \iff F = m_{roue} \cdot g \cdot \sin \alpha + K \cdot x + f \cdot \dot{x} + m_{roue} \cdot \ddot{x}$,
- Loi géométrique, $(E_0) \Leftrightarrow \lambda . sin \alpha = 0,7255. \lambda + 5,517,$
- Deuxième loi géométrique, $(E_2) \iff z(t) = \lambda_0 \cdot \sin(\alpha_0) \lambda \cdot \sin(\alpha)$.

Avec (E_0) et (E_2) , on obtient la relation entre z(t) et x(z), (E_0) , $(E_2) \Leftrightarrow z(t) = 0.7255$. x(t). En remplaçant λ par $\lambda_0 + x$, on retrouve cette équation.

Il est nécessaire de quantifier sin α afin d'estimer une valeur moyenne : c'est une moyennisation de la fonction sur l'intervalle restreint. La quantification donne $(E_0) \iff \sin \alpha = \frac{5,517}{\lambda} + 0,7255$; de plus, on connait les valeurs de λ sur l'intervalle restreint :

 $\lambda \in [75; 110]mm \iff \sin \alpha \in [0,77565; 0,79906] \implies \sin \alpha \approx 0,787.$

Equation de la dynamique ramenée en statique (voir point détaillé dans <u>modèle masse-</u><u>ressort</u>).

$$(E_1) \iff F = m_{roue}. g. \sin \alpha + K. x = m_{roue}. g. 0,787 + \frac{K. z(t)}{0,7255}$$

6)Annexes

a)Programme python pour les pertes par frottement

Un premier script est transmis ci-dessous. Il est rédigé en python et des commentaires sont ajoutés pour aider à la compréhension globale.

```
# -*- coding: utf-8 -*-
.....
Created on Mon Jul 11 15:35:48 2022
@author: paul kuffer
.....
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
nombre_points=50
durée_de_l_acquisition=4 #en seconde
#
                                                                                                #
#information sur le robot:
longueur = 1 #en mètre
R=[[0],[0],[0]] # position du robot initialement
def linst(V1,V2):
                                   #=>calcul du rayon instantané de rotation
  #il y a 5 possibilités en fonction de V1 et V2
  if V1==V2:
    linst="+infini"
  elif V1*V2>=0:
    if abs(V2)>abs(V1):
      linst=(V2*longueur)/(V2-V1)-longueur/2
    else:
      linst=-(V1*longueur)/(V1-V2)+longueur/2
  else: #V1*V2<=0:
    if abs(V2)>abs(V1):
      linst=-(abs(V1)-abs(V2))*longueur/(2*(abs(V1)+abs(V2)))
    else:
      linst=(abs(V2)-abs(V1))*longueur/(2*(abs(V2)+abs(V1)))
  return(linst)
```

```
def calcul_integral_theta(V1,V2,V1_dt,V2_dt,dt): #=>calcul de thêta pour n'importe quelle vitesse de rotation
  linst =linst(V1,V2)
  linst_dt=linst(V1_dt,V2_dt)
  if linst != "+infini" and linst dt != "+infini": #il faut considérer avec un Inst = infini
    if abs(linst )>=longueur/2:
      borne_=(V1+V2)/(2*linst_)
      borne dt=(V1 dt+V2 dt)/(2*linst dt)
      return((borne_+borne_dt)*dt/2,linst_,linst_dt)
    else:
      borne_=-V1/(longueur/2-linst_)
      borne_dt=-V1_dt/((longueur/2-linst_dt))
      return((borne_+borne_dt)*dt/2,linst_,linst_dt)
    else:
      return (0, linst , linst dt)
def trajectoire(V1,V2,V1 dt,V2 dt,dt):
                                            #=>calcul global de la trajectoire au fil du temps
  theta, inst, inst dt=calcul integral theta(V1,V2,V1 dt,V2 dt,dt)
  if inst=="+infini" or inst_dt=="+infini":
    Vmoy=(V1+V2)/2
    R[0].append(Vmoy*dt*np.cos(R[2][-1]+np.pi/2)+R[0][-1]) #nouveau x
    R[1].append(Vmoy*dt*np.sin(R[2][-1]+np.pi/2)+R[1][-1]) #nouveau y
    R[2].append(theta+R[2][-1])
  else:
    R[2].append(theta+R[2][-1])
    R[0].append(inst*np.cos(R[2][-1])+R[0][-1]-inst*np.cos(R[2][-2])) #nouveau x
    R[1].append(inst*np.sin(R[2][-1])+R[1][-1]-inst*np.sin(R[2][-2])) #nouveau y
  return(R)
                                                                                               #
#
def V_1(t):
  return(1)
def V_2(t):
  return(-2)
échelle de temps=np.linspace(0,durée de l acquisition,nombre points)
for indice, temps in enumerate (échelle_de_temps[:-1]):
  dt=échelle_de_temps[indice+1]-échelle_de_temps[indice]
  V1,V2=V 1(temps),V 2(temps)
  V1_dt,V2_dt=V_1(temps+dt),V_2(temps+dt)
  R=trajectoire(V1,V2,V1_dt,V2_dt,dt)
plt.plot(R[0],R[1])
plt.show()
```



Contact

Mail : contact@arvi-projet.fr Adresse : 3 rue Filaterie 71250 CLUNY

